

FONCTIONS PRIMITIVES

I) FONCTION PRIMITIVE D'UNE FONCTION

1) Activités :

Activité 1 :

- 1- Déterminer une fonction qui admet pour fonction dérivée la fonction $f(x) = 2x^3 - x^2$
- 2- Déterminer une fonction qui admet pour fonction dérivée la fonction : $g(x) = \frac{3}{1+x^2}$.
- 3- a) Soit la fonction $H(x) = \frac{1}{2}\sin(2x) + \frac{\pi}{4}$; vérifier que H est dérivable sur \mathbb{R} et que $(\forall x \in \mathbb{R})(H'(x) = \cos(2x))$
La fonction H s'appelle **une fonction primitive** de la fonction $h(x) = \cos(2x)$ sur \mathbb{R}
- b) Montrer que $H_1(x) = \frac{1}{2}\sin(2x) + 10$ est aussi une fonction primitive pour la fonction h
- c) Donner une expression de toutes les fonctions primitives de h

Activité 2 :

Soient F une fonction **primitive** de la fonction f sur l'intervalle I c'est-à-dire $(\forall x \in I)(F'(x) = f(x))$
et G une fonction **primitive** de la fonction g sur l'intervalle I , α et β deux réels.

- 1- Montrer que $(\alpha F + \beta G)$ est une fonction primitive de la fonction $(\alpha f + \beta g)$ sur I .
- 2- Soient F_1 et F_2 deux fonctions **primitives** de la fonction f sur l'intervalle I ; Montrer que :
 $(\forall x \in I)(F_2(x) = F_1(x) + \lambda)$ où λ est un réel quelconque.
- 3- Démontrer que si f admet une fonction primitive sur I et $x_0 \in I$; alors il existe une unique fonction F_0 fonction primitive de f telle que $F_0(x_0) = y_0$ où y_0 un réel quelconque.

2) Définition et propriétés

Définition :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I ; On dit que la fonction F est une fonction **primitive** de la fonction f sur l'intervalle I si :

- F est dérivable sur I
- $(\forall x \in I)(F'(x) = f(x))$

Théorème :(admis)

Si f est continue sur I alors f admet une fonction primitive sur I

Remarque :

La continuité dans le théorème précédent est une condition suffisante qui n'est pas nécessaire.

Exemples :

- ❶ Soit $\begin{cases} f(x) = 2x\sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

- 1- Vérifier que f n'est pas continue en 0
- 2- Soit $F(x) = x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)$.

a) Montrer que F est dérivable sur \mathbb{R} .

b) Montrer que F est une fonction primitive de f sur \mathbb{R}

Propriété :

Si f admet une fonction primitive F sur I alors toutes les fonctions primitives de f sur I s'écrivent de la forme : $F + \lambda$ où λ est un réel.

Propriété :

Si F_1 et F_2 sont deux fonction primitive d'une fonction f sur I alors $(\forall x \in I)(F_2(x) = F_1(x) + \lambda)$ où $\lambda \in \mathbb{R}$

Exemple de fonction qui n'admet pas de primitive

Soit la fonction f définie par ;
$$\begin{cases} f(x) = 2x + 1 & \text{si } x \leq 1 \\ f(x) = 2x - 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Montrons que f n'admet pas de primitive sur \mathbb{R} .

Remarquez que f n'est pas continue sur \mathbb{R} ; (elle n'est pas continue en 1)

$F_1(x) = x^2 + x + \lambda_1$ est une fonction primitive de la fonction f sur $] - \infty, 1]$.

$F_2(x) = x^2 - x + \lambda_2$ est une fonction primitive de la fonction f sur $]1, +\infty[$.

Si f admet une primitive F sur \mathbb{R} alors ils existent λ_1 et λ_2 tels que :
$$\begin{cases} F(x) = x^2 + x + \lambda_1 & \text{si } x \leq 1 \\ F(x) = x^2 - x + \lambda_2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

et que F soit dérivable sur \mathbb{R} et $(\forall x \in \mathbb{R})(F'(x) = f(x))$

On a F est dérivable sur $] - \infty, 1[$ et $(\forall x \in] - \infty, 1[)(F'(x) = f(x))$

et F est dérivable sur $]1, +\infty[$ et $(\forall x \in]1, +\infty[)(F'(x) = f(x))$

Le problème il faut déterminer (s'ils existent) λ_1 et λ_2 dans \mathbb{R} pour que F soit dérivable en 1 et que :

$$F'(1) = f(1) = 3.$$

$$\text{On a } F(1) = 2 + \lambda_1$$

d'autre par pour que f soit dérivable en 1, il faut qu'elle soit continue en 1, ce qui implique

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} F(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} F(x) = F(1) \text{ on en déduit que } 2 + \lambda_1 = \lambda_2 \text{ d'autre part}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{F(x) - F(1)}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 + x + \lambda_1 - 2 - \lambda_1}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 + x - 2}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)(x+2)}{x-1} = 3 = F'_d(1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{F(x) - F(1)}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - x + \lambda_2 - 2 - \lambda_1}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - x - 2 + \lambda_2 - \lambda_1}{x - 1} \quad (\lambda_2 = 2 + \lambda_1) \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - x - 2 + 2 + \lambda_1 - \lambda_1}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - x}{x - 1} \end{aligned}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x(x-1)}{x-1} = 1 = F_g'(1)$$

Donc pour tous réels λ_1 et λ_2 ; $F_d'(1) = 3 \neq 1 = F_g'(1)$

D'où F n'existe pas et par suite f n'admet pas de primitive sur \mathbb{R}

Propriété :

Si f admet une fonction primitive sur I et $x_0 \in I$; alors il existe une unique fonction F_0 fonction primitive de f telle que $F_0(x_0) = y_0$ où y_0 un réel quelconque.

Exercice :

Déterminer la fonction primitive de la fonction $f(x) = 2x^2 + x + 1$ et qui s'annule en 3

Propriété :

Si F est une fonction **primitive** de la fonction f sur l'intervalle I et G une fonction **primitive** de la fonction g sur l'intervalle I et α un réel alors :

- $(F + G)$ est une fonction **primitive** de la fonction $(f + g)$ sur I
- (αF) est une fonction **primitive** de la fonction (αf) sur I

Remarque :

Ce sont **les seules opérations sur les fonctions primitives.**

3) Tableau des fonctions primitives usuelles.

La fonction	Sa fonction primitive	Intervalles
α ($\alpha \in \mathbb{R}$)	$\alpha x + c$	\mathbb{R}
x^n ($n \in \mathbb{N}$)	$\frac{1}{n+1} x^{n+1} + c$	\mathbb{R}
\sqrt{x}	$\frac{2}{3} \sqrt{x^3} + c$	\mathbb{R}^+
$\sqrt[n]{x}$	$\frac{n}{n+1} \sqrt[n]{x^{n+1}}$	\mathbb{R}^+
x^r ($r \in \mathbb{Q}/\{-1\}$)	$\frac{1}{r+1} x^{r+1} + c$	\mathbb{R}^{*+}
$\sin(ax + b)$	$\frac{-1}{a} \cos(ax + b) + c$	\mathbb{R}
$\cos(ax + b)$	$\frac{1}{a} \sin(ax + b) + c$	\mathbb{R}
$\frac{a}{1+x^2}$	$a \times \arctan(x) + c$	\mathbb{R}

4) Opérations sur les fonctions primitives.

Les seules opérations sur les fonctions primitives sont : la somme et le produit par un réel. Mais grâce au tableau des opérations sur les fonctions dérivées on peut en déduire :

La fonction	Sa fonction primitive
$u' + v'$	$u + v + C^{te}$
$\alpha u'$	$\alpha u + C^{te}$
$u' u^n$ ($n \in \mathbb{N}$)	$\frac{1}{n+1} u^{n+1} + C^{te}$
$\frac{u'}{u^2}$	$\frac{-1}{u} + C^{te}$
$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$	$\sqrt{u} + C^{te}$
$u' \sqrt[n]{u}$ ($n \in \mathbb{N}^*$)	$\frac{n}{n+1} \sqrt[n]{u^{n+1}} + C^{te}$
$u' u^r$ ($r \in \mathbb{Q}/\{-1\}$)	$\frac{1}{r+1} u^{r+1} + C^{te}$
$u' \times v'$ ou	$v u + C^{te}$
$\frac{u'}{u^2+1}$	$\arctan(u) + C$

Cette ligne est une généralisation des 4 lignes précédentes

5) Application :**5.1 Primitives directe**

❶ Déterminons une fonction primitive de $f(x) = 7x\sqrt[3]{3x^2 + 5}$

On doit remarquer que la fonction $u(x) = 3x^2 + 5$ donc $u'(x) = 6x$

$$\begin{aligned} \text{et par suite} \quad f(x) &= \frac{7}{6} \times 6x \times \sqrt[3]{2x^2 + 5} \\ &= \frac{7}{6} (3x^2 + 5)' \times \sqrt[3]{2x^2 + 5} \quad (\text{c'est de la forme : } u'^n \sqrt{u} \text{ (} n = 3)) \end{aligned}$$

Donc les fonctions primitives de f s'écrivent de la forme : $F(x) = \frac{7}{6} \times \frac{3}{4} \sqrt[3]{(3x^2 + 5)^4} + C = \frac{7}{8} \sqrt[3]{(3x^2 + 5)^4} + C$

❷ Déterminons une fonction primitive de $g(x) = \frac{4x+1}{(2x^2+x)^4}$

On doit remarquer que la fonction $u(x) = 2x^2 + x$ donc $u'(x) = 4x + 1$

$$\begin{aligned} \text{Et par suite :} \quad g(x) &= \frac{(2x^2+x)'}{(2x^2+x)^4} \\ &= (2x^2 + x)' \times (2x^2 + x)^{-4} \quad (\text{c'est de la forme : } u' u^r \text{ (} r = -4)) \end{aligned}$$

Donc les fonctions primitives de g s'écrivent de la forme : $G(x) = \frac{1}{-4+1} (2x^2 + x)^{-4+1} + C = \frac{1}{3(2x^2+x)^3} + C$

❸ Déterminons une fonction primitive de $h(x) = 7x \cos(\pi x^2 + 3)$

On pose $u(x) = \pi x^2 + 3$ donc $u'(x) = 2\pi x$ et par suite :

$$\begin{aligned} h(x) &= 7x \cos(\pi x^2 + 3) \\ &= \frac{7}{2\pi} \times 2\pi x \times \cos(\pi x^2 + 3) \\ &= \frac{7}{2\pi} (\pi x^2 + 3)' \times \cos(\pi x^2 + 3) \quad (\text{C'est de la forme : } u' \times \text{vou}) \end{aligned}$$

Donc les fonctions primitives de h s'écrivent de la forme : $H(x) = \frac{7}{2\pi} \sin(\pi x^2 + 3) + C$

5.2) Autres situations :

Malheureusement ce n'est pas toujours aussi "directe" ; Par fois il faut faire d'autres calculs.

❶ Déterminons une fonction primitive de $h(x) = \frac{2}{x^2+2x+4}$

A remarquer que $h(x) = \frac{2}{(x+1)^2+3}$ ce que nous laisse à penser à la fonction \arctan

$$\begin{aligned} h(x) &= \frac{2}{(x+1)^2+3} \\ &= \frac{2}{3[\frac{1}{3}(x+1)^2+1]} \\ &= \frac{1}{3} \frac{2}{(\frac{1}{\sqrt{3}}x + \frac{1}{\sqrt{3}})^2 + 1} \\ &= \frac{2\sqrt{3}}{3} \times \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{(\frac{1}{\sqrt{3}}x + \frac{1}{\sqrt{3}})^2 + 1} \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} \times \frac{(\frac{1}{\sqrt{3}}x + \frac{1}{\sqrt{3}})'}{(\frac{1}{\sqrt{3}}x + \frac{1}{\sqrt{3}})^2 + 1} \quad (\text{C'est de la forme : } \frac{u'}{u^2+1}) \end{aligned}$$

Donc les fonctions primitives de la fonction h sont les fonctions : $H(x) = \frac{2}{\sqrt{3}} \text{Arctan} \left(\frac{1}{\sqrt{3}}x + \frac{1}{\sqrt{3}} \right) + C$

On peut utiliser cette méthode pour toutes les fonctions de la formes : $\frac{\alpha}{ax^2+bx+c}$ où le discriminant Δ est strictement négatif.

Exercice : Déterminer les fonctions primitives des fonctions $u(x) = \frac{5}{x^2+x+1}$

Remarque :

- ✓ Si le discriminant Δ est strictement positif, il faut factoriser $ax^2 + bx + c$ et on va faire appel à d'autres fonctions qu'on va voir par la suite.
- ✓ Si le discriminant Δ est nul : on utilise la forme $\frac{u'}{u^2}$ comme application : Déterminer les fonctions primitives de la fonction $f(x) = \frac{6}{4x^2+4x+1}$

Exercices :

Déterminer les fonctions primitives des fonctions :

1. $f(x) = \frac{x^2+5}{x^2+1}$
2. $g(x) = \frac{\sin x}{\sqrt[3]{2+\cos x}}$
3. $k(x) = \tan^2 x$
4. $u(x) = \cos^4 x$ (utiliser : $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$)
5. $v(x) = \sin^3 x$ (Remarquer que : $\sin^3 x = \sin x \sin^2 x$)

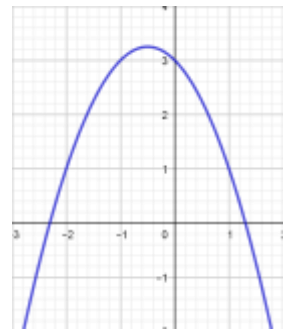
II) THEOREME DE ROLLE ; THEOREME DES ACCROISSEMENTS FINIS (T.A.F)

1) Approche :

1.1 Activités

Activité 1 :

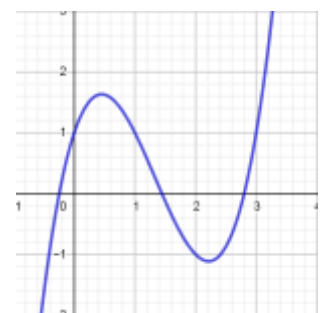
La courbe ci-contre est la courbe de la fonction : $f(x) = -x^2 - x + 3$



- 1- Vérifier que $f(-2) = f(1)$.
- 2- Trouver le réel c dans $] - 2,1[$ tel que $f'(c) = 0$
- 3- Interpréter géométriquement résultat.

Activité 2 :

La courbe ci-contre est la courbe de la fonction $g(x) = x^3 - 4x^2 + 3x + 1$

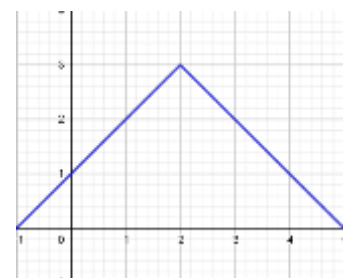


- 1- vérifier que : $g(0) = g(3)$.
- 2- Déterminer les réels c_1 et c_2 dans $]0,3[$ tels que $g'(c_1) = g'(c_2) = 0$
- 3- Interpréter géométriquement résultat.

Activité 3 :

Dans la courbe ci-contre on a $f(0) = f(4)$

Quelle est la valeur logique de l'assertion : $(\exists c \in]0,4[)(f'(c) = 0)$?



2) Le théorème :

Théorème de Rolle

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ et telle que : $f(a) = f(b)$. Alors il existe un réel $c \in]a, b[$ tel que : $f'(c) = 0$.

Preuve :

Puisque f est continue alors ils existent m et M dans \mathbb{R} tels que : $f([a, b]) = [m, M]$, où $m = \min_{x \in [a, b]} f(x)$ et

$$M = \max_{x \in [a, b]} f(x).$$

- Si $m = M$ alors f est constante sur $[a, b]$ d'où $(\forall x \in]a, b[)(f'(x) = 0)$
- Si $m \neq M$ (alors $m < M$) on a alors $f(a) > m$ ou $f(a) < M$.
 - Si $m < f(a)$ alors : il existe c dans $]a, b[$ tel que : $f(c) = m$

$$(\forall x \in]a, c[) \left(\frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \frac{f(x) - m}{x - c} \leq 0 \right)$$

$$\text{et donc } \lim_{x \rightarrow c^-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = f'_g(c) \leq 0$$

D'autre part :

$$(\forall x \in]c, b[) \left(\frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \frac{f(x) - m}{x - c} \geq 0 \right)$$

$$\text{et donc } \lim_{x \rightarrow c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = f'_d(c) \geq 0$$

et puisque f est dérivable en c alors $f'_d(c) = f'_g(c) = 0$

- Si $f(a) < M$ même démonstration.

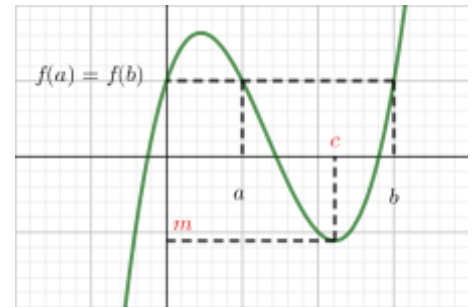


figure 1

Remarque :

- Il n'y a pas, a priori, unicité du point c tel que $f'(c) = 0$. *figure 1*
- La fonction $x \mapsto \sqrt{1 - x^2}$ sur $[-1, 1]$ nous donne un exemple de situation où f n'est pas dérivable au bord. *figure 2*

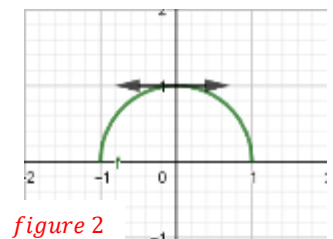


figure 2

- Le théorème n'est plus vrai si f n'est pas dérivable sur $]a, b[$ tout entier comme le montre l'exemple de la fonction f définie par $f(x) = |x|$ sur $[-1, 1]$ *figure 3*

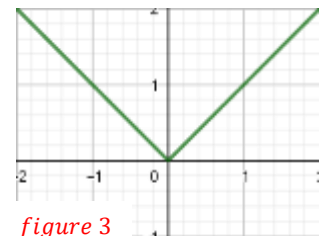


figure 3

3) Applications du théorème

Exercice 1 :

Soit P la fonction polynomiale définie par : $P(x) = 3x^4 - 11x^3 + 12x^2 - 4x + 2$.

Montrer que P' s'annule au moins une fois sur $]0, 1[$

Exercice 2 :

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par : $f(x) = \frac{\sin x + \cos x}{1 + \cos^2 x}$,

Montrer que, pour tout $a \in \mathbb{R}$, la fonction f' s'annule au moins une fois sur l'intervalle $]a, a + 2\pi[$.

Exercice 3 :

Considérons une fonction f continue sur $[0, 1]$ et dérivable sur $]0, 1[$ telle que $f(0) - f(1) = -1$.

Montrer en utilisant le théorème de Rolle ($\exists c \in]0,1[$) $\left(\frac{f'(c)}{c} = \frac{4}{(c^2+1)^2}\right)$

Indication : $\frac{f'(c)}{c} = \frac{4}{(c^2+1)^2} \Leftrightarrow f'(c) - \frac{4c}{(c^2+1)^2} = 0$

Considérer $g(x) = f'(x) - \frac{4x}{(x^2+1)^2}$ déterminer une fonction G fonction primitive de g et appliquer Rolle sur G .

Exercice 4 : Détermination d'une limite.

Considérons les deux fonctions : $u(t) = \text{Arctan}(t) - t$ et $v(t) = t^2$ et soit $x \in \mathbb{R}^*$

1- Montrer qu'il existe c compris entre 0 et x tel que : $\frac{u(x)}{v(x)} = \frac{u'(c)}{v'(c)}$

2- En déduire la limite : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{Arctan}(t) - t}{t^2}$

Indication : $\frac{u(x)}{v(x)} = \frac{u'(c)}{v'(c)} \Leftrightarrow u(x).v'(c) - v(x).u'(c) = 0$

Considérer la fonction : $g(t) = u(x).v(t) - v(x).u(t)$ sur $[a, b]$ où $\begin{cases} a = \inf(x, 0) \\ b = \sup(x, 0) \end{cases}$

Exercice 5 : Convergence d'une suite :

Soit la suite $(u_n)_n$ définie par : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \left(u_n = \frac{1}{n\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n \sqrt{k}\right)$.

1- En utilisant le T.A.F sur la fonction $f(x) = x\sqrt{x}$ sur les intervalles $[k, k+1]$; montrer que :

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) \left(u_n - \frac{1}{n} \leq \frac{2}{3} - \frac{2}{3n\sqrt{n}} \leq u_n - \frac{1}{n\sqrt{n}}\right).$$

2- En déduire que $(u_n)_n$ est convergente et déterminer sa limite.

4) Inégalité des accroissements finies I.A.F :

Théorème :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I . Si f est dérivable sur I et $(\forall x \in I)(|f'(x)| \leq k$ (où $k \in \mathbb{R}^{**+}$)
 $(\forall (x, y) \in I^2)(|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|)$

Preuve :

Soient x et y deux éléments de I

Si $x \neq y$

On a f est continue sur l'intervalle fermé de borne x et y et dérivable sur l'ouvert de borne x et y .

Donc, et d'après le T. A.F, il existe c compris entre x et y tel que : $f(x) - f(y) = f'(c)(x - y)$ et puisque $c \in I$ alors : $|f'(c)| \leq k$; donc :

$$|f(x) - f(y)| = |f'(c)||x - y| \leq k|x - y|$$

Si $x = y$ l'inégalité est vraie.

D'où la preuve du théorème.

Exercice

En utilisant le I.A.F, montrer que $(\forall x \in \mathbb{R})(|\sin x| \leq |x|)$

Applique le I.A.F sur l'intervalle de borne 0 et

Applique le I.A.F sur l'intervalle de borne 0 et .